1

基本計算①

公務員のライト

1 基本計算①

① 指数関数、対数関数

(1) 指数の基本公式

指数は、掛け算を行った回数を表しています。指数の計算では以下の３つの指数法則がポイントです。

$$
\begin{aligned}
&1.\ a^n \times a^m = a^{n+m}\\
&2.\ a^n \div a^m = a^{n-m}\\
&3.\ (a^n)^m = a^{nm}
\end{aligned}
$$

参考

$a^3 \times a^2 = a^{3+2}$

$a^3 \div a^2 = a^{3-2}$

$(a^3)^2 = a^{3\times 2}$

1. 指数が「0」のとき

$$a^0 = 1$$

2. 指数が負のとき

$$a^{-1} = \frac{1}{a}\ ,\ a^{-2} = \frac{1}{a^2}\ ,\ a^{-3} = \frac{1}{a^3}\ ,\cdots,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3. 指数が分数のとき

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\ ,\ a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}\ ,\ a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}\ ,\cdots,a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

(2) 対数関数

指数は数の桁を決める重要な計算ですが、桁が大きくなるなど複雑な計算が必要となったときには不便です。そこで、指数部分だけ取り出して計算できるようにしたのが対数です。次のように定義されています。

$$a^n = x \Rightarrow n = \log_a x$$

アドバイス

対数の分野はよく出題されます。しっかり抑えておきましょう。

このときの「a」を底、「x」を真数と言います。
どちらも正の数、かつ１ではないという条件でなければなりません。
（ $a \neq 1$ かつ $a > 0$ 、$x > 0$ ）

「$a^1 = a$, $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ 」であることから、次のことが言えます。

$$\log_a a = 1\ ,\ \log_a 1 = 0\ ,\ \log_a \frac{1}{a} = -1$$

対数関数の基本公式を以下に表します。

$$
\begin{aligned}
&1.\ \log_a x + \log_a y = \log_a xy\\
&2.\ \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}\\
&3.\ \log_a x^n = n \log_a x
\end{aligned}
$$

これらの公式はすべての底がそろっていることが前提です。
底が異なる場合には次の底の変換公式を用いる必要があります。

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

アドバイス

n 進数の分野はあまり出題実績はありませんがやり方は決まっていますので出題されたときは確実に解けるようにしておきましょう。

② n 進数、論理式

(1) n 進数

０〜($n-1$)までの n 個の文字を使い表現することの方法を n 進数と言います。n 進数の数を10進数に直す際には、桁数に注意が必要です。

n 進数の数では、下の位から、１($=n^0$)の位、n の位…と位が n 倍ずつ増えていきます。この位の数に数を掛けることで10進数に直すことができます。また小数点以下の場合には、$\frac{1}{n}$ の位、$\frac{1}{n^2}$ の位…と数が $\frac{1}{n}$ 倍になっていきます。

(位の考え方)	n^3 の位	n^2 の位	n の位	1 の位	$\frac{1}{n}$ の位	$\frac{1}{n^2}$ の位

(n 進数で表された数を10進数に直す計算のやり方)

$$
\begin{aligned}
a_3\, a_2\, a_1\, a_0\, a_{-1}\, a_{-2} &= a_3 \times n^3 + a_2 \times n^2\\
&\quad + a_1 \times n + a_0 + \frac{a_{-1}}{n} + \frac{a_{-2}}{n^2}
\end{aligned}
$$

確認

２進数：
０と１だけを使う
８進数：
０から７までを使う
16進数：
０から９と A から F までを使う
（A は10、B は11、…、F は15を表します）

くわしく

例えば２進数「1101」は、2^3 の位＝1、2^2 の位＝1、2^1 の位＝0、2^0 の位＝1となります。

２進数「1101」を10進数に変換します。

$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13$

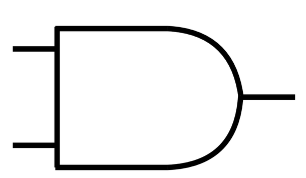
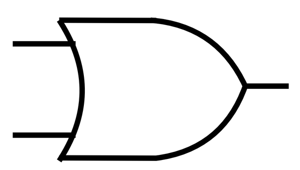
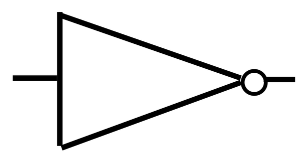
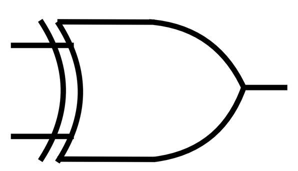
したがって、２進数の「1101」は10進数で「13」となります。

(2) **論理変数と論理計算**

「0」、「1」の値しかとらない変数を論理変数と言います。この変数の計算が論理計算です。特に代表的なものとして、論理積（AND）、論理和（OR）、排他的論理和（XOR）を以下のように示します。

A	B	論理積 $(A \cdot B)$	論理和 $(A+B)$	排他的論理和 $(A \oplus B)$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

また、$\overline{A}$ で表される「否定」は、「0」と「1」を逆にする計算です。論理計算は、取りえる値が限られていることから、全てを表に書いて調べていけば確実に解くことができます。

論理積（AND）	A B 	$A \cap B$
論理和（OR）	A B 	$A \cup B$
否定（NOT）	A 	$\overline{A}$
排他的論理和（XOR）	A B 	$A \oplus B$

アドバイス

この分野はあまり出題実績はありませんが、論理計算は取り得る値が決まっています。取り得る値をすべて表をかいて調べていけば確実に解くことができます。

確認

排他的論理和（XOR）とは、2つの論理変数が「異なるときに真（はい）」になる論理計算のことです。つまり、どちらか一方だけが「真」のときに「真」となり、両方が「真」または両方が「偽」のときは「偽」となります。

▶▶▶ スタートアップ問題

$\sqrt[5]{16}$, $\sqrt[10]{32}$, $\sqrt[7]{64}$ の大小関係として正しいのはどれか。

1. $\sqrt[5]{16} < \sqrt[10]{32} < \sqrt[7]{64}$
2. $\sqrt[5]{16} < \sqrt[7]{64} < \sqrt[10]{32}$
3. $\sqrt[10]{32} < \sqrt[5]{16} < \sqrt[7]{64}$
4. $\sqrt[10]{32} < \sqrt[7]{64} < \sqrt[5]{16}$
5. $\sqrt[7]{64} < \sqrt[10]{32} < \sqrt[5]{16}$

データ・資料
【国家一般職】
高卒技術・2014年度

【解説】

数を比較しやすいように「$\sqrt{\ }$」を指数表現に直します。
以下のようになります。

$$\sqrt[5]{16} = (16)^{\frac{1}{5}}, \quad \sqrt[10]{32} = (32)^{\frac{1}{10}}, \quad \sqrt[7]{64} = (64)^{\frac{1}{7}}$$

次に、底の数をそろえて指数を比較していきます。
「16」、「32」、「64」を素因数分解を使って変換します。

$$16 = 2^4, \quad 32 = 2^5, \quad 64 = 2^6$$

これより、すべて「2」の累乗の形で表すことができ、指数を比較することができます。

$$2^{\frac{4}{5}},\ 2^{\frac{1}{2}},\ 2^{\frac{6}{7}} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{4}{5} < \frac{6}{7} \Rightarrow \sqrt[10]{32} < \sqrt[5]{16} < \sqrt[7]{64}$$

したがって、答えは③です。

参考

指数には次のような性質があります。

$a > 1$ のとき
$p < q \Leftrightarrow a^p < a^q$

$a < 1$ のとき
$p < q \Leftrightarrow a^p > a^q$

▶▶▶ スタートアップ問題

$\log_2 \sqrt{8}$ はいくらか。

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{3}{4}$
3. 1
4. $\frac{5}{4}$
5. $\frac{3}{2}$

データ・資料
【国家一般職】
高卒技術・2022年度

【解説】
「$\sqrt{8}$」を指数を使って表します。

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$$

これを使って与えられた対数を変換します。

$$\log_2\sqrt{8}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

したがって、答えは⑤です。

参考
対数関数の基本公式「3」を利用します。
$\log_a x^n=n\log_a x$

▶▶▶スタートアップ問題

$\log_2 8$，2，$\log_2\sqrt{2}$ の大小関係として正しいのはどれか。

1. $\log_2 8 < 2 < \log_2\sqrt{2}$
2. $2 < \log_2 8 < \log_2\sqrt{2}$
3. $2 < \log_2\sqrt{2} < \log_2 8$
4. $\log_2\sqrt{2} < \log_2 8 < 2$
5. $\log_2\sqrt{2} < 2 < \log_2 8$

データ・資料
【国家一般職】
高卒技術・2020年度

【解説】
それぞれの値を計算していきます。

- $\log_2 8=\log_2 2^3=3$
- 2
- $\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

以上より数を比較すると「$\frac{1}{2}<2<3$」となることから、
「$\log_2\sqrt{2}<2<\log_2 8$」が分かります。

したがって、答えは⑤です。

▶▶▶スタートアップ問題

論理式 $\overline{A}\cdot B+(A+B)\cdot A$ と等価なものは，次のうちではどれか。
ただし，「$\overline{P}$」は論理変数 P の否定を，「$+$」は論理和を，「$\cdot$」は論理積を表すものとする。

1. A
2. $A+B$
3. $A\cdot B$
4. $\overline{A+B}$
5. $\overline{B}$

データ・資料
【国家一般職】
高卒技術・2014年度

【解説】
「$\overline{A}\cdot B$」は、$\overline{A}$ と B の論理積（AND）ということです。
真理値表にまとめてみます。

A	B	$\overline{A}\cdot B$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

「$\overline{A}$ とBがともに 1」の時だけ「1 を出力」します。
「$\overline{A}\cdot B$」は、A「0」、B「1」の時だけ「1」出力です。

次に、「$(A+B)\cdot A$」を考えます。真理値表にまとめてみます。

A	B	$(A+B)\cdot A$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

A「1」であれば、出力が「1」が分かります。

「$\overline{A}\cdot B$」と「$(A+B)\cdot A$」という２つの部分の「論理和 (OR)」は次のことが分かります。

$A=0$, $B=0$ のときだけ０、のこりは１

これは「 $A+B$ 」と同じ働きをします。
したがって、答えは②です。

スタートアップ問題

2^{125} を 10 進法表示したときの桁数と先頭の数字の組合せとして正しいのはどれか。
ただし，$\log_{10}2=0.30103$ とする。

	桁数	先頭の数字
1.	37 桁	3
2.	37 桁	4
3.	37 桁	5
4.	38 桁	4
5.	38 桁	5

データ・資料
【国家一般職】
高卒技術・2013年度

【解説】
「2^{125} を10進法表示する」とは、「２を125回かけた数を表す」ということです。

まず、桁数を求めます。
「n」を10進数で示したときの桁数「d」は次のように表せます。

$$d=\log_{10}(n)+1$$

この式に数字を当てはめていきます。

$$\log_{10}\left(2^{125}\right)=125\log_{10}2$$
$$=125\times 0.30103=37.62 \quad ・・・①$$

$$d=37.62+1=38$$

2^{125} の10進数での桁数は「38」と分かりました。

参考
Nを整数部分とする３桁の正の数とすると、$10^2\leqq N<10^3$ が成り立ちます。これの常用対数をとります。

$$\log_{10}10^2\leqq\log_{10}N<\log_{10}10^3$$

すなわち以下が成り立ちます。

$$2\leqq\log_{10}N<3$$
$$\text{桁数}=\log_{10}N+1$$

次に先頭の数字を求めます。

38桁の数の先頭の数字を求めるために、「数の大きさを大まかに見積もる方法」を使います。

①の式より、10進法での桁数が約「37.62」ということが分かりました。つまり、「2^{125} の大きさはおおよそ $10^{37.62}$ 」に近いということです。
このままだと分かりにくいので、累乗部分を整数部分と小数部分に分けて考えます。

$$10^{37.62}=10^{37}\times 10^{0.62}$$
$$\approx 10^{37}\times 4.25$$

つまり、「2^{125}」はおよそ「 4.25×10^{37} 」という大きさで、「10^{37}」部分は数の桁数を表すので、先頭の数字は「４」であるとわかります。

よって、桁数は「38」、先頭の数字は「４」です。
したがって、答えは④です。

頻出過去問！コレが出る

問題 1

実数 a, b が $30^a=2$, $30^b=3$ を満たすとき，$\log_{180}5$ を a, b で表したものとして正しいのはどれか。

1. $\dfrac{a+b}{1+a+b}$
2. $\dfrac{1-a-b}{1+a+b}$
3. $\dfrac{b-a}{1+a+b}$
4. $\dfrac{1+a+b}{1-a-b}$
5. $\dfrac{b-a}{1-a-b}$

解説

与えられた条件より log を使って表します。

$$a=\log_{30}2\ ,\ \ b=\log_{30}3$$

参考
対数関数の定義を使います。必ず覚えておいて下さい。

ここで、底の変換公式を利用して求める式を変換して計算します。

$$\log_{180}5=\frac{\log_{30}5}{\log_{30}180}$$

・分子　$\log_{30}5=\log_{30}\dfrac{30}{6}=\log_{30}30-\log_{30}2\cdot3=1-a-b$

・分母　$\log_{30}180=\log_{30}30\cdot2\cdot3=1+a+b$

以上より、次のようになります。

$$\log_{180}5=\frac{1-a-b}{1+a+b}$$

したがって、答えは②です。

答え 2

問題 2

$a=\log_2 3$, $b=\log_3 7$ とするとき，21 を表す式として正しいのはどれか。

1. 2^{ab}
2. 2^{1+ab}
3. $2^{a(b+1)}$
4. 3^{ab}
5. 3^{1+ab}

解説

条件の式を変換します。

$$2^a=3\ ,\ \ 3^b=7$$

「21」を分解して上の式を代入します。

$$21=3\times7=2^a\times3^b=2^a\times(2^a)^b=2^{a(1+b)}=2^{a(b+1)}$$

したがって、答えは③です。

答え 3

問題 3

18^{30} の桁数はいくらか。

ただし，$\log_{10}2 = 0.301$，$\log_{10}3 = 0.477$ とする。

1. 30
2. 32
3. 34
4. 36
5. 38

解説

常用対数をとると次のようになります。

$$\log_{10} 18^{30} = 30 \log_{10} 2 \cdot 3^2 = 30 \left(\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3\right) = 37.65$$

よって、以下のことが分かります。

$$37 < \log_{10} 18^{30} < 38$$

参考
スタートアップ問題の５問目の解説を参考にして下さい。

以上より、18^{30} は38桁の数字であることが分かります。

したがって、答えは⑤です。

答え 5

問題 4

次の 10 進数で表した小数を 2 進数に直すとき，無限小数となるものを選べ。

1. 0.1
2. 0.25
3. 0.5
4. 0.625
5. 0.75

解説

「無限小数」というのは、10進数の「0.333...」のように小数の桁がいつまでも続く数のことです。「分母が２の累乗の分数（$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$ など）」で表せると２進数では「有限小数」、表せないと「無限小数」となります。

つまり、選択肢の10進数を変形し、「分母が２の累乗の分数（$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$ など）」で表せるかどうかを考えていきます。

選択肢①：$0.1 = \dfrac{1}{10}$

分母が「２の累乗」ではないので「無限小数」となります。

この時点で正解は①と分かりますが、参考までに残りの選択肢についても考えていきます。

選択肢②：$0.25 = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2}$

分母が「２の累乗」なので「有限小数」となります。

選択肢③：$0.5 = \dfrac{1}{2}$

分母が「２の累乗」なので「有限小数」となります。

選択肢④：$0.625 = 0.5 + 0.125 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$

分母が「２の累乗」なので「有限小数」となります。

選択肢⑤：$0.75 = 0.5 + 0.25 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$

分母が「２の累乗」なので「有限小数」となります。

選択肢①のみが「分母が２の累乗の分数」で表すことが出来ず、無限小数ということが分かります。

したがって、答えは①です。

答え 1

<別解>
10進数の小数部分を２進数に変換していきます。

■小数部分の変換手順
- 小数部分に「２」を掛け算します。
- 出てきた整数部分を記録します。（０か１になります）
- 結果の小数部分が「０」になるまで、または十分な桁数まで、残った小数部分に「２」を掛け続けます。
- 整数部分を順に並べると、それが小数部分の２進数表記になります。

（例）選択肢④の10進数「0.625」を２進数に変換する

計算	整数部分	小数部分
0.625×２＝1.25	1	0.25
0.25×２＝0.5	0	0.5
0.5×２＝1.0	1	0.0

小数部分が「０」になったので、ここで計算終了です。
整数部分「101」を並べると、10進数の「0.625」は２進数で「0.101」になります。

同様に他の選択肢についてもそれぞれ２進数に直すと以下のようになります。
選択肢②「0.25（10）」　→　「0.01（２）」
選択肢③「0.5　(10）」　→　「0.1　(２）」
選択肢⑤「0.75（10）」　→　「0.11（２）」

（例）選択肢①の10進数「0.1」を２進数に変換する

計算	整数部分	小数部分
0.1×２＝0.2	0	0.2
0.2×２＝0.4	0	0.4
0.4×２＝0.8	0	0.8
0.8×２＝1.6	1	0.6
0.6×２＝1.2	1	0.2
0.2×２＝0.4	0	0.4
⋮	⋮	⋮

整数部分「000110…」は循環して終わらないので、
10進数「0.1」を２進数で表すと「0.000110...」となり、
無限小数になります。

よって、無限小数となるのは選択肢①とわかります。

したがって、答えは①です。

答え 1

参考
<10進数の整数部分を２進数に変換する方法>

■整数部分
手順
- 整数を「２」で割り算して余りを右側に記録します。（０か１になります）
- 割り算の商が「０」になるまで、「２」で割り続けます。その都度余りを記録します。
- すべての余りを「下から上」に並べると、それが２進数での表記になります。

（例）10進数の「25」を２進数に変換する

割り算	商	余り
25÷２＝12	12	1
12÷２＝6	6	0
6÷２＝3	3	0
3÷２＝1	1	1
1÷２＝0	0	1

10進数の「25」は２進数では「11001」になります。

問題 5

次の真理値表の㋐，㋑，㋒に当てはまるものとして正しいのはどれか。

A	B	$A+B$	$A \cdot B$	$\overline{A} \cdot B$	$\overline{\overline{A}+\overline{B}}$
0	0	0	0	0	㋑
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	㋐	0
1	1	1	1	0	㋒

	㋐	㋑	㋒
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	1	1	0
5	1	1	1

解説

$\overline{A}$ で表される「否定」は、「0」と「1」を逆にする計算です。$\overline{A} \cdot B$ を計算します。

A	$\overline{A}$	B	$\overline{A} \cdot B$
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0

したがって㋐には「0」が入ります。

次に、$\overline{\overline{A}+\overline{B}}$ を導き出していくにあたって、$\overline{A}+\overline{B}$ を考えてそれを否定します。

A	$\overline{A}$	B	$\overline{B}$	$\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{\overline{A}+\overline{B}}$
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1

これより、㋑には「0」、㋒には「1」が入ります。

よって、㋐は「0」、㋑は「0」、㋒は「1」です。

したがって、答えは②です。

答え 2

最短合格
公務員のライト

技術系専門科目

公務員のライトの「工学の基礎 数学」講座

まずは「無料」の
体験講義を見る

講座の詳細はこちら

無料 LINEで受講相談実施中！

どんな質問でもOK

- オススメの講座
- 講座の内容
- 決済方法
- スケジュール…等

お気軽にお問い合わせください。